

# Erklärung stellarer und planetarer Magnetfelder durch einen turbulenzbedingten Dynamomechanismus

M. STEENBECK und F. KRAUSE

Institut für Magnetohydrodynamik Jena der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Z. Naturforschg. 21 a, 1285—1296 [1966]; eingegangen am 30. März 1966)

In a foregoing paper<sup>1</sup> the effects of a turbulent motion on magnetic fields were investigated. Especially turbulence was treated under the influence of CORIOLIS-forces and gradients of density and/or turbulence intensity. It was shown that on these conditions the average cross-product of velocity and magnetic field has a non-vanishing component parallel to the average magnetic field. Here we give the consequences of this effect for rotating, electrically conducting spheres.

At first a sphere rotating with constant angular velocity is investigated. The quadratic effect provides for dynamo maintenance of the magnetic fields. A field of dipol-type has the weakest condition for maintenance. Applications to the magnetic field of the earth show a good agreement with the conceptions of the physical state of the earth's core.

For a second model differential rotation is included. We have also dynamo maintenance. Since we have to assume that generally the angular velocity is a function decreasing with the distance from the centre of the sphere, the calculations show that we have a preferred self-excited build-up of a quadrupol-type field. This model may be applicable to magnetic stars.

Finally we look for dynamo maintenance of alternating fields. We consider the skin-depth to be small compared with the radius of the sphere, then we have plane geometry. The existence of periodical solutions is proved. Applications to the general magnetic field of the sun, which has a period of 22 years, are discussed.

## 1. Einleitung

Die hier dargestellten Untersuchungen schließen unmittelbar an eine Arbeit an<sup>1</sup>, die von den Verfassern in Zusammenarbeit mit K.-H. RÄDLER durchgeführt wurde. Diese soll im folgenden mit (I) zitiert werden.

Es konnte dort (I) gezeigt werden, daß in einem turbulenten elektrisch leitenden fluiden Medium der Mittelwert des Kreuzproduktes  $\bar{v}' \times \bar{H}$  eine nichtverschwindende Komponente parallel zum mittleren Magnetfeld  $\bar{H}$  besitzen kann; dabei bezeichnet  $v'$  den turbulenten Anteil des Geschwindigkeitsfeldes  $v$ , also  $v' = v - \bar{v}$ . Hier sollen nun die Konsequenzen untersucht werden, die sich aus dem Ansatz

$$\bar{v}' \times \bar{H} = \alpha \bar{H} \quad (1)$$

für rotierende Kugeln ergeben.

Der Leitgedanke ist dabei der folgende: In den Himmelskörpern (Fixsterne, Planeten) wird in gewissen fluiden Gebieten im allgemeinen eine ungeordnete Bewegung vorhanden sein; diese ist besonders ausgeprägt in den Konvektionszonen der Fixsterne; aber auch im flüssigen Erdkern ist eine langsame derartige Bewegung in Form von Wärmeschlieren zu erwarten. Durch die Rotation steht diese Be-

wegung unter dem Einfluß von CORIOLIS-Kräften; ist dann zusätzlich eine Vorzugsrichtung etwa in Form eines Gradienten der Dichte oder der Turbulenzintensität vorhanden, so zeigt sich als ein Charakteristikum dieser ungeordneten turbulenten Bewegung die Auszeichnung eines Schraubensinnes. Ein solches turbulentes Geschwindigkeitsfeld besitzt keine Spiegelsymmetrie mehr — ein Schraubensinn ist vor dem anderen ausgezeichnet — und die nichtspiegelungsvariante Gl. (1) kann mit einem  $\alpha \neq 0$  bestehen.

In (I) wurde der Wert von  $\alpha$  berechnet. Die zur Ermöglichung der Durchrechnung eingeführten, die Allgemeinheit einschränkenden Voraussetzungen sind dort erläutert. Es ergab sich (I; 47)

$$\alpha = -\frac{16\gamma}{15} u \sigma \bar{v}^2 L^2 T \omega \cdot \text{grad}(\log \varrho) \sqrt{\bar{v}^2}. \quad (2)$$

[ $\mu$  Permeabilität;  $\sigma$  Leitfähigkeit;  $L$  Korrelationslänge;  $T$  Korrelationszeit;  $\omega$  Winkelgeschwindigkeit;  $\varrho$  Dichte;  $\gamma$  Faktor der Größenordnung 1 definiert in (I; 48)].

Eine einfache Betrachtung (I; S. 370) legt nahe, daß die weiterhin für die mittleren Feldgrößen geltenden MAXWELL-Gleichungen

$$\text{rot } \bar{E} = -\dot{\bar{B}}, \quad \text{rot } \bar{H} = \bar{i}, \quad \text{div } \bar{B} = 0 \quad (3), (4), (5)$$

ergänzt durch die dazugehörigen Materialgleichungen

<sup>1</sup> M. STEENBECK, F. KRAUSE u. K.-H. RÄDLER, Z. Naturforschg. 21 a, 369 [1966].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \sigma(\bar{\mathcal{E}} + \mu \bar{v} \times \bar{\mathcal{H}} + \mu \bar{v}' \times \bar{\mathcal{H}}) \\ &= \sigma(\bar{\mathcal{E}} + \mu \bar{v} \times \bar{\mathcal{H}} + \mu \alpha \bar{\mathcal{H}}), \\ \bar{B} &= \mu \bar{\mathcal{H}}\end{aligned}\quad (6)$$

Lösungen besitzen, die zeitlich nicht abklingen; eine durch die Turbulenz bedingte Dynamowirkung kompensiert dann die Ohmschen Verluste.

Die Gl. (3), (4), (5), (6), (7) gestatten es, alle gesuchten Feldgrößen durch  $\bar{\mathcal{H}}$  auszudrücken, welches selbst der Gleichung

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} = \text{rot}(\bar{v} \times \bar{\mathcal{H}}) + \text{rot} \alpha \bar{\mathcal{H}} + \frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \bar{\mathcal{H}} \quad (8)$$

genügt.

Wir lösen hier die Gl. (8) für eine rotierende leitende Kugel vom Radius  $R$  mit einer ortsunabhängigen Leitfähigkeit  $\sigma$ . Es sei Zylindersymmetrie in bezug auf die Rotationsachse vorhanden. Die Umgebung der Kugel wird als nichtleitend angenommen. Die Permeabilität sei durchweg die des Vakuums, also  $\mu = \mu_0$ . – Die diskutierten Modelle sind in Anlehnung an Beobachtungen ausgewählt; es werden allerdings Vereinfachungen zugunsten der Ermöglichung einer strengen mathematischen Durchrechnung in Kauf genommen.

Sehen wir diese Vereinfachungen als tragbar an, so können wir nach den hier vorliegenden Untersuchungen die Herkunft der uns bekannten stellaren Magnetfelder, das sind das allgemeine Magnetfeld der Sonne, das Magnetfeld der Erde und die Felder der magnetischen Sterne, auf Grund einer einheitlichen Vorstellung erklären.

Quantitativ sind exakte Aussagen schwer möglich, da ein Teil der eingehenden Parameter und Funktionen unbekannt sind. Die Rechnungen zeigen, daß die Anregungsbedingungen Geschwindigkeiten erfordern, die nicht größer als die beobachteten, bzw. aus anderen Gründen anzunehmenden sind. Das wundert nicht, denn bekanntlich liegt für einen magnetohydrodynamischen Dynamo die Schwierigkeit nicht in der Größenordnung des Geschwindigkeitsfeldes, sondern in dessen komplizierter räumlicher Struktur.

Im folgenden wird nur noch von den gemittelten Feldgrößen die Rede sein; wir verzichten daher von nun an auf die besondere Kennzeichnung derselben durch den darübergesetzten Querstrich.

## 2. Bestimmungsgleichungen

Wir führen ein auf die Rotationsachse bezogenes räumliches Polarkoordinatensystem  $r, \vartheta, \varphi$  ein. Das

Magnetfeld  $\bar{\mathcal{H}}$  wird in einen poloidalen Anteil  $\bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}$  und einen toroidalen Anteil  $\bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}$  aufgespaltet, die beide – auf Grund der Zylindersymmetrie – für sich divergenzfrei sind. Wir setzen

$$\bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}} = \mathcal{A} \text{rot} \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} = (0, 0, A(r, \vartheta; t)), \quad (9)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}} = (0, 0, H(r, \vartheta; t)); \quad (10)$$

$A$  und  $H$  werden dimensionsgleich, falls  $\mathcal{A}$  die Dimension einer Länge hat. Eine Fixierung von  $\mathcal{A}$  wird später vorgenommen.

Die Rotationsbewegung wird durch das Feld

$$\mathfrak{v} = (0, 0, r \cdot \sin \vartheta \cdot \omega(r, \vartheta)) \quad (11)$$

beschrieben; die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(r, \vartheta)$  ist als bekannte Ortsfunktion anzusehen. Wir gehen mit dem Ansatz  $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}} + \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}$  in die Gl. (8) ein. Es folgt

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}}{\partial t}}_{\text{pol}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}}{\partial t}}_{\text{tor}} &= \text{rot}(\underbrace{\mathfrak{v} \times \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}}_{\text{pol}}) + \underbrace{\text{rot} \alpha \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}}_{\text{tor}} \\ &+ \underbrace{\text{rot} \alpha \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}}_{\text{pol}} + \underbrace{\frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}}_{\text{pol}} + \underbrace{\frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}}_{\text{tor}}\end{aligned}$$

Da unter der Voraussetzung der Zylindersymmetrie die Rotation eines poloidalen Feldes toroidal und die Rotation eines toroidalen poloidal ist, ergibt sich eine Aufspaltung in zwei Vektorgleichungen, wie sie oben angedeutet ist. Bei dem poloidalen Anteil

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}}{\partial t} = \text{rot} \alpha \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}} + \frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}} \quad (12)$$

können wir mittels (9) zu einer integrierten Form übergehen. Es ergeben sich dann die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\alpha}{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}} + \frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \mathfrak{A}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}}{\partial t} = \text{rot}(\mathfrak{v} \times \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}}) + \text{rot} \alpha \bar{\mathcal{H}}_{\text{pol}} + \frac{1}{\mu \sigma} \mathcal{A} \bar{\mathcal{H}}_{\text{tor}}. \quad (14)$$

In Gl. (13) ist zunächst noch ein von der Integration herrührender Gradient frei, der jedoch nur eine  $\varphi$ -Komponente besitzt und quellenfrei ist. Als solcher kommt nur ein Feld vom Typ des Magnetfeldes eines längs der Rotationsachse fließenden Stromes in Frage. Da wir Singularitäten auf der Achse ausschließen, tritt dieser Gradient nicht auf.

(13) und (14) sind die beiden Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Funktionen  $H(r, \vartheta; t)$  und  $A(r, \vartheta; t)$ .

Sie sind durch Randbedingungen zu ergänzen.  
Da wir im Außenraum keine Leitfähigkeit haben,  
können keine Ströme austreten, d. h. es ist

$$(\text{rot } \mathfrak{H})_r = 0 \quad \text{für } r = R.$$

Hieraus folgt das Verschwinden des toroidalen Feldes auf der Kugeloberfläche, also

$$\text{Es gilt } \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\alpha}{A} H + \frac{1}{\mu \sigma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right\}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= r \sin \vartheta \left\{ H_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + H_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right\} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \alpha H_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\alpha H_r) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\mu \sigma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r H}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial H \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

dabei ist nach (9)

$$H_r = \frac{A}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A \sin \vartheta}{\partial \vartheta}, \quad H_\vartheta = -\frac{A}{r} \frac{\partial r A}{\partial r}. \quad (18)$$

### 3. Stationäres Magnetfeld. Starre Rotation

Da sowohl  $A$  wie auch  $H$  für  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$  verschwinden, bietet sich für die Lösung der Gln. (16) und (17) eine Entwicklung nach  $\sin(n\vartheta)$  an<sup>2</sup>:

$$A(r, \vartheta) = a_1(x) \sin \vartheta + a_2(x) \sin 2\vartheta + \dots \quad (19)$$

$$H(r, \vartheta) = h_1(x) \sin \vartheta + h_2(x) \sin 2\vartheta + \dots; \quad (20)$$

$x$  bezeichnet die normierte Länge  $x = r/R$ ,  $A$  wird gleich  $R$  gesetzt. Unter der Voraussetzung eines kugelsymmetrischen Aufbaues des Sternes folgt aus Gl. (2)

$$\alpha = \alpha_0 \beta(x) \cos \vartheta, \quad (21)$$

dabei ist  $\beta(x)$  dimensionslos und vom Maximalwert 1;  $\alpha_0$  ist eine Konstante.

Wir gehen mit den Ansätzen (19), (20) und (21) in die Gln. (16) und (17) ein. Im Sinne einer Approximation streichen wir hier die Glieder, die mit höheren Harmonischen behaftet sind. Dann erhalten wir die vier Gleichungen

$$\frac{d^2 a_1}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{da_1}{dx} - \frac{2 a_1}{x^2} + C \beta h_2 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2 h_2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dh_2}{dx} - \frac{6 h_2}{x^2} \quad (23)$$

$$-C \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \beta \frac{d(x a_1)}{dx} \right) - \frac{4 \beta a_1}{x^2} \right\} = 0;$$

$$\frac{d^2 a_2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{da_2}{dx} - \frac{6 a_2}{x^2} + C \beta h_1 = 0, \quad (24)$$

$$H(R, \vartheta; t) = 0. \quad (15)$$

Die zweite Randbedingung bringt zum Ausdruck, daß sich das Magnetfeld in der Kugel stetig an ein Gradientenfeld im Äußeren anschließt. Diese Bedingung wird später formuliert.

Abschließend sei die explizite Form der Gln. (13) und (14) angegeben.

$$\frac{d^2 h_1}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dh_1}{dx} - \frac{2 h_1}{x^2} \quad (25)$$

$$-C \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \beta \frac{d(x a_2)}{dx} \right) - 5 \frac{\beta a_2}{x^2} \right\} = 0,$$

$$C = \mu \sigma R \alpha_0 / 2. \quad (26)$$

Es ist bemerkenswert, daß dieses System von vier Gleichungen für vier Funktionen in zwei Systeme von je zwei Gleichungen für je zwei Funktionen zerfällt. Die erste Harmonische des poloidal Feldes – sie beschreibt ein Feld vom Typ eines Dipols – ist mit der zweiten Harmonischen des toroidalen Feldes gekoppelt, welche ein Feld, bestehend aus zwei entgegengesetzt orientierten Gürteln in den beiden Hemisphären beschreibt (Abb. 1). Die zweite Harmonische des poloidalen Feldes – sie beschreibt ein Feld vom Typ eines Quadrupols – ist mit der ersten Harmonischen des toroidalen Feldes gekoppelt, die ein Feld, bestehend aus einem Gürtel in der Umgebung der Äquatorebene, beschreibt (Abb. 2).

Beide Feldtypen können also unabhängig voneinander auftreten. Bei der Realisierung wird jedoch dem Feld der Vorzug gegeben werden, das die schwächere Anregungsbedingung, d. h. den betragsmäßig kleineren Eigenwert  $C$  besitzt.

Die Randbedingungen lauten einmal nach (15)

$$h_1(1) = h_2(1) = 0. \quad (27)$$

Zur Formulierung der zweiten Randbedingung denken wir uns das (rein poloidale) Magnetfeld im Äußeren durch ein Potential  $U$  dargestellt:

$$\mathfrak{H} = \text{grad } U, \quad r \geq R. \quad (28)$$

<sup>2</sup> Dem Problem angemessener ist eine Entwicklung nach den zugeordneten Kugelfunktionen  $P_n^1$ ; jedoch sind  $\sin \vartheta$  bzw.  $\sin 2\vartheta$  proportional zu  $P_1^1$  bzw.  $P_2^1$ , so daß in der hier behandelten Näherung noch kein Nachteil entsteht.

$U$  genügt der LAPLACESchen Gleichung und besitzt demzufolge die Form

$$\begin{aligned} U(r, \vartheta) &= \frac{b_0}{r} + \frac{b_1}{r^2} P_1(\cos \vartheta) + \frac{b_2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots \\ &= \left( \frac{b_0}{r} + \frac{b_2}{4r^3} \right) + \frac{b_1}{r^2} \cos \vartheta + \frac{3b_2}{4r^3} \cos 2\vartheta + \dots; \quad (29) \end{aligned}$$

dabei sind  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  Konstanten und  $P_n(\cos \vartheta)$  die LEGENDRESchen Polynome.

Berechnen wir nun  $H_r$  und  $H_\vartheta$  auf der Kugeloberfläche einmal aus (28) und (29) und zum anderen aus (18) und (19) und fordern wir die Gleichheit, so ergeben sich die Randbedingungen zu

$$a'_1(1) + 2a_1(1) = 0, \quad (30)$$

$$a'_2(1) + 3a_2(1) = 0. \quad (31)$$

Wir lösen die Gln. (22) bis (25) mit den Randbedingungen (27), (30), (31) durch einen Potenzreihenansatz unter der Voraussetzung

$$\beta(x) = 1, \quad (32)$$

deren physikalische Bedeutung später erläutert wird.

Für das Dipolfeld ergibt sich

$$\begin{aligned} C a_1(x) &= a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n+1}^{(1)} (Cx)^{2n+1} \\ &\quad + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_{2n}^{(1)} (Cx)^{2n}; \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(x) &= a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Theta_{2n+1}^{(2)} (Cx)^{2n+1} \\ &\quad + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Theta_{2n}^{(2)} (Cx)^{2n}; \quad (34) \end{aligned}$$

$$\Theta_1^{(2)} = \Theta_2^{(2)} = 1, \quad \Theta_{n+2}^{(2)} = \frac{n^2+5n+2}{(n^2+5n)(n^2+5n+4)} \Theta_n^{(2)}, \quad (35)$$

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{n^2+n-6}{n^2+n-4} \Theta_n^{(2)}. \quad (36)$$

$a$  und  $b$  sind zunächst willkürliche Konstanten. Die Randbedingungen (27) und (30) führen auf ein homogenes lineares System für  $a$  und  $b$ , welches unter der Bedingung

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{m+1} C^{2m} \{ 2(m-n+1) \Theta_{2n+1}^{(2)} \alpha_{2(m-n)}^{(1)} \\ - (2n+3) \alpha_{2n+1}^{(1)} \Theta_{2(m-n)}^{(2)} \} = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Als betragsmäßig kleinste Eigenwerte erhalten wir aus (37)

$$C_{\text{Dipol}} = \pm 4,13. \quad (38)$$

Für das Quadrupolfeld ergibt sich

$$\begin{aligned} C a_2(x) &= a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n+1}^{(2)} (Cx)^{2n+1} \\ &\quad + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_{2n}^{(2)} (Cx)^{2n}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Theta_{2n+1}^{(1)} (Cx)^{2n+1} \\ &\quad + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Theta_{2n}^{(1)} (Cx)^{2n}; \quad (40) \end{aligned}$$

$$\Theta_1^{(1)} = \Theta_2^{(2)} = 1, \quad \Theta_{n+2}^{(1)} = \frac{n^2+5n+1}{(n^2+5n+4)(n^2+5n)} \Theta_n^{(1)}; \quad (41)$$

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n-5} \Theta_n^{(1)}. \quad (42)$$

Für  $a$  und  $b$  gilt das beim Dipolfeld gesagte. Die Eigenwertgleichung aus den Randbedingungen (27) und (31) lautet hier

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{m+1} C^{2m} \{ (2m-2n+3) \Theta_{2n+1}^{(1)} \alpha_{2(m-n)}^{(2)} \\ - (2n+4) \alpha_{2n+1}^{(2)} \Theta_{2(m-n)}^{(1)} \} = 0. \quad (43) \end{aligned}$$

Als betragsmäßig kleinste Eigenwerte ergeben sich

$$C_{\text{Quadrupol}} = \pm 4,81.$$

Die Existenz dieser Eigenwerte zeigt, daß in einer im Mittel starr rotierenden Kugel durch den  $\alpha$ -Effekt der selbsterregte Aufbau eines Magnetfeldes möglich ist. Die schwächste Anregungsbedingung weist dabei ein Feldtyp auf, der sich außerhalb der Kugel als Dipolfeld fortsetzt. Im Inneren ist dieses Feld begleitet von zwei toroidalen Gürteln mit entgegengesetzten Orientierungen.

#### 4. Anwendungen auf das Magnetfeld der Erde<sup>3</sup>

Genaue Analysen der seismographischen Beobachtungen zeigen, daß die Erde einen Kern besitzt, in dem keine Transversalwellen mehr existieren. Dieser Kern muß also in einem flüssigen oder gasförmigen, jedenfalls in einem nichtfesten Zustand sein. Sein Radius wird mit rund 3500 km und die Leitfähigkeit  $\sigma$  mit  $3 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  angegeben.

<sup>3</sup> Die Angaben über den physikalischen Zustand der Materie des Erdkernes sind dem Artikel von O. LUCKE, „Über den physikalischen Zustand der Materie im Erdinneren und den Ursprung des geomagnetischen Hauptfeldes“, erschienen in „Geomagnetismus und Aeronomie“, Bd. III, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, entnommen.

Im Erdkern ist eine konvektive Bewegung vorhanden. Sie wird durch örtliche Schwankungen der Erwärmung der Materie aufrechterhalten. Auf die Existenz kann aus den Variationen der Tageslänge geschlossen werden. Abschätzungen der Größenordnung der Konvektionsgeschwindigkeiten führen auf  $v = 1 \text{ cm/s}$  bis höchstens  $10 \text{ cm/s}$ . Als Korrelationszeit werden etwa 3 Stunden, d. h. also  $T \approx 10^4 \text{ s}$ , und als Korrelationslänge 100 m bis 1 km angegeben.

Außer der Wirkung der sicher vorhandenen CORIOLIS-Kräfte ist für ein  $\alpha \neq 0$  noch ein Gradient des Produktes  $\varrho / v^2$  notwendig. Wegen der geringen Kompressibilität der Materie im Erdkern ist eine Dichteänderung nur schwach ausgeprägt (ungefähr 10%); jedoch muß eine Änderung der Turbulenzintensität in der Weise vorhanden sein, daß sie im Zentrum wegen des fehlenden Temperaturgradienten und am Rande des Erdkernes wegen der sich erhöhenden Viskosität verschwindet. Wir vergleichen nun die Angaben über den Erdkern mit dem im vorangehenden Abschnitt behandelten Modell. Die Dynamowirkung röhrt dort von dem quadratischen  $\alpha$ -Effekt her, sie ist also insbesondere unabhängig vom Vorzeichen des Faktors  $\alpha$ . Deshalb dürften sich auf Grund der Annahme (32) – sie besagt, daß wir einen linearen Anstieg bzw. Abfall für  $v^2$  gemäß

$$\bar{v}^2 = v_{\max}^2 x, \quad \text{bzw.} \quad \bar{v}^2 = v_{\max}^2 (1-x) \quad (45)$$

voraussetzen – quantitativ nicht sehr stark abgeänderte Eigenwerte ergeben gegenüber dem Fall, wo  $v^2$  bis zu einem Maximalwert ansteigt und dann wieder auf Null zurückgeht.

Für den Eigenwert  $C$  folgt aus (2), (26) und (45)

$$C = \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2 L^2 \omega T v_{\max}^2. \quad (46)$$

Setzen wir nun  $\mu = \mu_0$  und (im Einklang mit den vorangestellten Angaben)  $L = 10^3 \text{ m}$ ,  $v_{\max} = 10^{-2} \text{ m/s}$ , so ergibt sich

$$C \approx 5.$$

Die Übereinstimmung mit dem Wert (38) ist überraschend gut; jedoch ist zu beachten, daß die Angaben über  $L$  und  $v_{\max}$  jede mit Ungenauigkeiten bis zu einem Faktor 10 behaftet sind. Da beide Größen quadratisch in den Ausdruck für  $C$  eingehen, ist auf Grund unserer heutigen Kenntnisse über den physikalischen Zustand des Erdkernes nur ein Intervall für  $C$  angebar, das vier Größenordnungen um-

faßt, nämlich

$$5 \cdot 10^{-2} \lesssim C \lesssim 5 \cdot 10^2.$$

Der Eigenwert aus dem Modell des vorigen Abschnittes liegt also genau in der geometrischen Mitte dieses Intervall.

Zusammenfassend können wir sagen, daß auf der Grundlage der hier entwickelten Vorstellungen das Magnetfeld der Erde erklärt werden kann. Ausgehend von einem aus irgendwelchen Gründen vorhandenen Anfangsfeld ist durch die durch den  $\alpha$ -Effekt bedingte Dynamowirkung dasjenige Magnetfeld aufgebaut worden, das die schwächere Anregungsbedingung besitzt, also das Feld vom Typ eines Dipols. Weder qualitativ noch quantitativ bestehen nach den heutigen Kenntnissen über den Zustand des Erdkernes Widersprüche. Es ist zu erwarten, daß die hier vorgetragene Theorie sogar einmal genauere Auskünfte über die Beschaffenheit des Erdinneren wird liefern können als die bisherigen Wege.

Daß wir ein Feld mit einer zur Drehachse parallelen Achse bekommen, ist auf unsere Voraussetzung der Rotationssymmetrie zurückzuführen. Wir müssen annehmen, daß eine mit der täglichen Umdrehung der Erde mitlaufende Störung der Rotationssymmetrie, deren Natur noch näher zu ergründen wäre, für die Neigung der Achse des Erdfeldes gegen die Rotationsachse verantwortlich zu machen

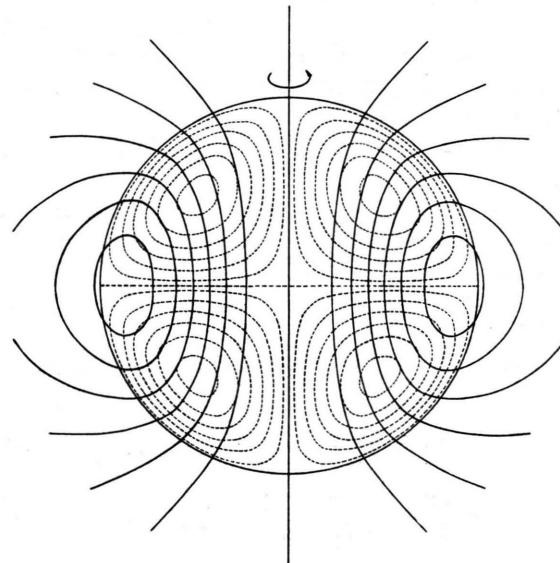


Abb. 1. Feld vom Typ eines Dipols für die im Mittel starr rotierende Kugel.

— Feldlinien des poloidalen Anteiles,

— Linien konstanter Feldstärke des toroidalen Anteiles.

ist<sup>4</sup>. Auch Richtungsänderungen des Magnetfeldes wären dann als Folge tektonischer Veränderungen verständlich.

In Abb. 1 ist das durch (19), (20), (33) bis (38) definierte Feld dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen die Feldlinien des poloidalen Feldes dar. Die gestrichelten Linien sind die Linien konstanter Feldstärke des toroidalen Feldes, das bei der Erde in der Nordhalbkugel von Ost nach West und in der Südhalbkugel von West nach Ost weist.

### 5. Stationäres Magnetfeld. Nichtstarre Rotation

Bei zur Äquatorebene symmetrischen Verhältnissen lässt sich die Winkelgeschwindigkeit in eine Reihe nach  $\cos(2n\vartheta)$  entwickeln

$$\omega(r, \vartheta) = \omega_0(r) + \omega_1(r) \cos 2\vartheta + \dots . \quad (47)$$

Wir nehmen an, daß der durch die differentielle Rotation bewirkte Aufbau des toroidalen Feldes dominiert und streichen in Gl. (17) das vom  $\alpha$ -Effekt herrührende Glied.

Wir gehen nun mit den Ansätzen (19), (20) für die Funktionen  $A$  und  $H$  und (47) für  $\omega$  in die Gln. (16) und (17) ein. Von der Entwicklung (47) benutzen wir hier allerdings nur das erste Glied, also  $\omega(r, \vartheta) = \omega_0$ , und setzen  $\omega_0' = \text{const}$ .

Diese Annahme ist mit den Gesetzmäßigkeiten der Bewegungsvorgänge in einem Fixstern nicht vereinbar. Da es uns jedoch darauf ankommt, die in den Gleichungen steckenden prinzipiellen Möglichkeiten für eine Dynamowirkung aufzuzeigen, führen wir die Rechnungen aus Gründen der mathematischen Einfachheit mit dem angegebenen Ansatz durch.

Wir erhalten für die gesuchten Funktionen  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ ,  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$  wiederum zwei Systeme von zwei Gleichungen mit den Paarungen  $a_1$ ,  $h_2$  und  $a_2$ ,  $h_1$ . Diese beiden Systeme sind hier außerdem identisch:

Sind  $\eta(x)$  und  $\zeta(x)$  zwei Funktionen, die den Gleichungen

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\eta}{dx} - \frac{6\eta}{x^2} + C_1 \zeta = 0, \quad (48)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\zeta}{dx} - \frac{2\zeta}{x^2} + C_2 \eta = 0; \quad (49)$$

<sup>4</sup> Eine langsame, über die Pole hinwegziehende systematische Strömung könnte z. B. aus der gezeitenbedingten äquatorparallelen Umlaufströmung durch schräg liegende Profile an der Innenseite zur festen Erdkruste erzeugt wer-

genügen, so ist für den Fall des Dipolfeldes

$$a_1(x) = \zeta(x), \quad h_2(x) = \eta(x), \quad (50)$$

$$C_1 = \mu \sigma R^3 \omega_0', \quad C_2 = \mu \sigma R \alpha_0/2 \quad (51)$$

und für den Fall des Quadrupolfeldes

$$a_2(x) = \eta(x), \quad h_1(x) = \zeta(x), \quad (51)$$

$$C_1 = \mu \sigma R \alpha_0/2, \quad C_2 = -\mu \sigma R^3 \omega_0'/2. \quad (52)$$

Das Gleichungssystem (48), (49) besitzt die allgemeine Lösung

$$\eta(x) = a 10 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_1 C_2)^n x^{4n}}{(4n+5)(4n+2)!} \quad (53)$$

$$+ b 36 x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_1 C_2)^n x^{4n}}{(4n+6)(4n+3)!},$$

$$\zeta(x) = -a 10 C_2 x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+4)(C_1 C_2)^n x^{4n}}{(4n+6)!} \quad (54)$$

$$-b 36 C_2 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)(C_1 C_2)^{n-1} x^{4n}}{(4n+3)!}.$$

Die Randbedingungen (27) und (30) führen für den Fall des Dipoles auf die Eigenwertgleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+3}{(4k+5)!} 2^{2k+1} (C_1 C_2)^k = 0. \quad (55)$$

Es ergibt sich für die kleinste Wurzel

$$C_1 C_2 = 326,0. \quad (56)$$

Das positive Vorzeichen des Produktes  $C_1 C_2$  bedingt nach (50) ein positives Vorzeichen von  $\alpha_0 \omega_0'$ .

Für das Quadrupolfeld ergibt sich aus (27) und (31) die Eigenwertgleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k+1} (C_1 C_2)^k}{(4k+4)!} = 0. \quad (57)$$

Es folgt als kleinster Eigenwert

$$C_1 C_2 = 500,5. \quad (58)$$

Aus (52) ist ersichtlich, daß wir hier  $\alpha_0 \omega_0' < 0$  haben. Die Entscheidung, ob ein Dipolfeld oder ein Quadrupolfeld aufgebaut wird, hängt hier also weniger von der betragsmäßigen Größe der Eigenwerte als vom Vorzeichen des Produktes  $\alpha_0 \omega_0'$  ab.

den. Eine Strömungsgeschwindigkeit von der Größenordnung  $40\,000 \text{ km}/10^6 \text{ a} \approx 1 \mu\text{m}/\text{s}$  würde die beobachtete Deklination erklären.

## 6. Anwendungen auf magnetische Sterne

Es ist zu erwarten, daß Fixsterne im allgemeinen nichtstarr rotieren. Die Ergebnisse des Abschnittes 5 lassen also Schlüsse auf die Magnetfelder zu, die von Fixsternen aufgebaut werden. Entscheidend für die Beantwortung der Frage, welcher Feldtyp entsteht – Dipol oder Quadrupol –, ist das Vorzeichen des Produktes  $\alpha_0 \omega'_0$ . Aus (2) und (21) folgt

$$\alpha_0 \omega'_0 = -\frac{8\gamma}{15} \mu \sigma \bar{v^2} L^2 T \frac{d\omega^2}{dr} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} \right). \quad (60)$$

Das Vorzeichen dieses Produktes wird durch die letzten beiden Faktoren bestimmt.

Für den örtlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit in einem Fixstern sind im wesentlichen zwei Einflüsse maßgebend: Die Zähigkeit, die bei isotropen Verhältnissen auf einen Ausgleich der Winkelgeschwindigkeit, d. h. auf starre Rotation hinwirkt, und großräumige Zirkulationen. Letztere sorgen für einen Ausgleich des Drehimpulses und wirken in Richtung auf eine Proportionalität der Winkelgeschwindigkeit zum reziproken Quadrat des Abstandes von der Rotationsachse. Wir müssen beide Einflüsse berücksichtigen, haben also mit einem zwischen diesen Grenzfällen liegenden Rotationsgesetz zu rechnen; auf jeden Fall ist dann  $d\omega^2/dr < 0$ .

Auch für den zweiten Faktor ist eine Entscheidung jedenfalls für den überwiegenden Teil des Sternvolumens möglich: Im allgemeinen gilt

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dr} < 0; \quad (61)$$

die starken Gravitationskräfte, die im Sterninneren mit Ausnahme der zentralen Gebiete vorliegen, sorgen für einen derartig hohen Dichtegradienten, daß dieser das Vorzeichen bestimmt.

Sehen wir (61) als erfüllt an, so folgt aus (60), daß das Produkt  $\alpha_0 \omega'_0$  negativ ist. Unsere Rechnungen zeigen also, daß im stationären Fall bei nichtstarrer Rotation ein Quadrupolfeld aufgebaut wird.

Diese Folgerung aus unseren Untersuchungen, daß also Fixsterne als stationäre Magnetfelder solche vom Quadrupol-Typ aufbauen, wird durch gewisse Beobachtungsergebnisse gestützt<sup>5</sup>. Insbesondere läßt das spektroskopisch beobachtete unter-

schiedliche Verhalten der beiden Magnetpole auf Unterschiede in ihrer geometrischen Konfiguration schließen. Diese sind bei einem Dipol nicht vorhanden, wohl aber bei einem Quadrupol.

Bedingt durch die großen Dimensionen ( $R = 10^5$  bis  $10^7$  km) und die gute Leitfähigkeit seiner Materie ( $\sigma \gtrsim 10^6 - 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ) ist für einen Fixstern die Felderhaltung durch außerordentlich kleine Geschwindigkeiten möglich. Auch bei sehr vorsichtigen Annahmen ergeben sich aus den Anregungsbedingungen (53), (59) und (60) Turbulenzgeschwindigkeiten, die weit unter 1 cm/s liegen.

Die Induktionswirkung der differentiellen Rotation führt zum Aufbau eines toroidalen Magnetfeldgürtels in Äquatornähe (Abb. 2). Da am Äquator die  $\vartheta$ -Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit durch Null geht, erscheint daher gerade für ein Quadrupolfeld die in unserer Rechnung durchgeführte Vernachlässigung am besten gerechtfertigt.

Aus (52), (53) und (55) ist zu entnehmen, daß die Feldstärke des toroidalen Feldes um den Faktor  $C_2$  größer ist als die des poloidalen Feldes. Nun gilt

$$C_2 = -\frac{1}{2} \mu \sigma R^3 \omega'_0 = \frac{1}{2} (\mu \sigma R^2) (-R \omega'_0) \gtrsim 10^{10}; \quad (62)$$

denn die Zeitkonstante  $\mu \sigma R^2$  eines in einem Fixstern befindlichen Magnetfeldes liegt mindestens in der Größenordnung  $10^{10}$  a, und für die totale Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $-R \omega'_0$  ist der Wert von  $1 \text{ a}^{-1}$  sicher nicht zu hoch gegriffen.

Spektroskopische Untersuchungen magnetischer Sterne zeigen, daß die Feldstärke des poloidalen Feldes bis zu einigen  $10^4$  Oersterdt betragen kann. Die dann nach (62) für das toroidale Feld zu fordernde Feldstärke von  $10^{14}$  Oerstedt kann aber in einem Stern nicht realisiert werden.

Es gibt mehrere Ursachen, die einer Ausbildung eines so starken Feldes entgegenstehen:

Erstens sind die Sterne zu jung, als daß sich der stationäre Zustand bereits ausgebildet haben könnte. Zweitens schwächt die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Materie gerade die induktionswirksamen Bewegungen und führt daher mit zunehmender Feldstärke zu einer Annäherung an die starre Rotation. Drittens wird als Folge des magnetischen Druckes magnetfeldführende Materie an die Oberfläche getrieben, wo der Feldabbau mit wesentlich kleineren Zeitkonstanten vor sich geht.

Gerade dieser letzte Umstand bewirkt, daß das Feld nicht über den maximal von einem Stern trag-

<sup>5</sup> R. STEINITZ, Stellar and Solar Magnetic Fields, herausgeg. von R. LÜST, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, S. 117.

baren Wert von etwa  $10^8$  Oerstedt ansteigen kann<sup>6</sup>, läßt aber erwarten, daß Felder von annähernd dieser Größe tatsächlich auftreten. Ein Magnetfeldgürtel von solch hoher Feldstärke wird dann aber entscheidenden Einfluß auf den Sternaufbau und die Verteilung der Elemente haben.

In Abb. 2 ist das Quadrupolfeld definiert durch (19), (20), (52), ... (55), (58), (59) dargestellt.

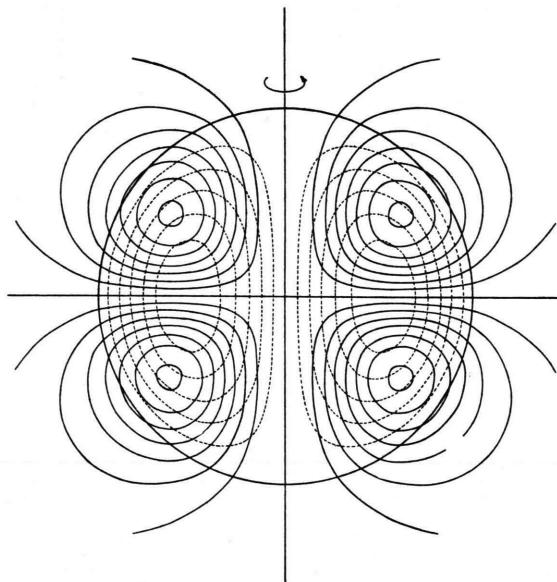


Abb. 2. Feld vom Typ eines Quadrupols für die im Mittel nichtstarr rotierende Kugel.

— Feldlinien des poloidalen Anteiles,  
— — Linien konstanter Feldstärke des toroidalen Anteiles.

## 7. Zeitlich periodisches Feld

Wir setzen voraus, daß die für ein zeitlich periodisches Magnetfeld charakteristische Länge  $\delta$ , die Skintiefe definiert durch

$$\delta^2 = 2/(\mu \sigma \Omega), \quad (63)$$

klein ist im Vergleich zum Kugelradius  $R$ ;  $\Omega$  bezeichnet hierbei die Frequenz des Magnetfeldes. Das Feld ist also nur in einer äußeren Schale der Dicke  $\delta$  merklich von Null verschieden.

Unserem Modell liegen die folgenden Vorstellungen zugrunde (Abb. 3): Das Magnetfeld tritt im wesentlichen in den polaren Zonen aus der Kugel aus; in mittleren Breiten und am Äquator verlaufen die Feldlinien nahezu parallel zur Oberfläche. Dort ist  $H_r \approx 0$ .

<sup>6</sup> S. CHANDRASEKHAR u. E. FERMI, Astrophys. J. 118, 116 [1953].

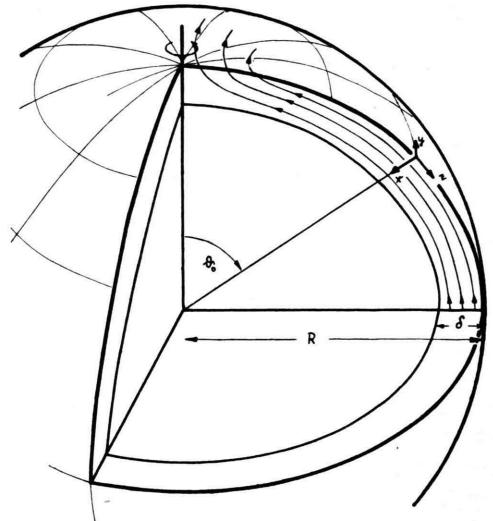


Abb. 3. Zur Einführung des Koordinatensystems für die Behandlung des zeitlich periodischen Feldes.

Wir fassen einen Punkt in mittleren Breiten  $\vartheta = \vartheta_0$  auf einer Halbkugel ins Auge und führen dort ein kartesisches Koordinatensystem  $(x, y, z)$  ein, wobei  $x = R - r$  ist,  $y$  in  $\varphi$ -Richtung und  $z$  in  $\vartheta$ -Richtung weist. Nehmen wir nun das Magnetfeld als von  $\vartheta$  unabhängig an, und vernachlässigen wir Glieder von der Größenordnung  $\delta/R$ , so erhalten wir aus (16) und (17) die Gleichungen für einen eben begrenzten Halbraum

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \omega^*(x) H_z - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha H_z) + \frac{1}{\mu \sigma} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}; \quad (64)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha H_y) + \frac{1}{\mu \sigma} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}; \quad (65)$$

dabei ist

$$H_y = H, \quad H_z = \Lambda \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \omega^* = \sin \vartheta_0 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_0} \quad (66)$$

gesetzt. Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir wieder an, daß das wesentliche Koppelungsglied in Gl. (64) das von der differentiellen Rotation herührende ist. Es sei also

$$\delta \omega^* \gg \alpha. \quad (67)$$

Wir weisen nun die Existenz von periodischen Lösungen  $H_y$ ,  $H_z$  der Gln. (64) und (65) nach, die für  $x = 0$  und  $x \rightarrow +\infty$  verschwinden. Mit dem Ansatz

$$H_y = e^{i\Omega t - kx} f(x), \quad H_z = e^{i\Omega t - kx} g(x), \quad (68)$$

$$k = (1+i)/\delta = \sqrt{i \mu \sigma \Omega} \quad (69)$$

erhalten wir aus (64) und (65)

$$f'' - 2k f' = -\mu \sigma \omega^* g, \quad (70)$$

$$g'' - 2k g' = -\mu \sigma e^{kx} (\alpha e^{-kx} f'). \quad (71)$$

Betrachten wir die rechte Seite jeder Gleichung als Inhomogenität, so können wir zu einer Integralform übergehen. Mit der Forderung endlicher Werte von  $f$  und  $g$  im Unendlichen ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mu \sigma \alpha(x) g(x) \\ &\quad + \mu \sigma e^{2kx} \int_x^\infty \omega^*(\xi) g(\xi) e^{-2k\xi} d\xi; \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\mu \sigma \alpha(x) f(x) \\ &\quad + \mu \sigma k e^{2kx} \int_x^\infty \alpha(\xi) f(\xi) e^{-2k\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (73)$$

Die weiteren Rechnungen führen wir unter der Annahme durch, daß der  $\alpha$ -Effekt nur in einer dünnen Schicht an der Oberfläche vorhanden ist. Wir setzen

$$\alpha = \alpha_0 e^{-x/d} \quad (74)$$

und nehmen an, daß  $d$  klein ist im Vergleich zur Skintiefe,

$$d \ll \delta; \quad (75)$$

demzufolge wird

$$\alpha(x) f(x) = \alpha_0 e^{-x/d} x f'(0), \quad (76)$$

da  $f(0) = 0$ . Zunächst folgt aus Gl. (73)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\mu \sigma}{2} \left\{ - \int_0^x \alpha(\xi) f(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + e^{2kx} \int_x^\infty \alpha(\xi) f(\xi) e^{-2k\xi} d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \alpha(\xi) f(\xi) e^{-2k\xi} d\xi \right\} \end{aligned}$$

und daraus mit (74) und (75)

$$g(x) = \mu \sigma \alpha_0 d^2 f'(0) \left\{ e^{-x/d} \left( \frac{x}{d} + 1 \right) - 1 \right\}. \quad (77)$$

Setzen wir dieses  $g(x)$  in (72) ein, so ist die Berechnung von  $f'(x)$  möglich. Für  $x=0$  ergibt sich nach Division durch  $f'(0) \neq 0$  die Bedingung für die Selbsterhaltung des Feldes.

Es ist dies die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine nichttriviale Lösung  $H_y, H_z$  des Gleichungssystems (64), (65) existiert, die für  $x=0$  und  $x \rightarrow +\infty$  verschwindet.

Den übersichtlichsten Ausdruck erhalten wir, wenn wir unter der Voraussetzung (75) das mit  $\exp(-x/d)$  behaftete Glied in (77) gegenüber 1

vernachlässigen; dann folgt

$$1 + \mu^2 \sigma^2 d^2 \alpha_0 \int_0^\infty \omega^*(x) e^{-2kx} dx = 0. \quad (78)$$

Die Erfüllung dieser Gleichung in Real- und Imaginärteil bei bekanntem  $\omega^*(x)$  liefert zwei Bedingungen, durch die die erforderliche Größe der Induktionseffekte in Form des Produktes  $\alpha \omega^*$  und die Frequenz  $\Omega$  des Wechselfeldes festgelegt werden. Wir gehen hier zur Vereinfachung den umgekehrten Weg und bestimmen Funktionen  $\omega^*(x)$  als Lösungen von (78).

Mit der DIRACschen  $\delta$ -Funktion bekommen wir die Lösung

$$\omega^*(x) = \frac{e^\pi}{\mu^2 \sigma^2 d^2 \alpha_0} \delta(x - \pi \delta/2). \quad (79)$$

Wir können hieraus entnehmen, wie der Verlauf entsprechender eigentlicher Funktionen aussieht, die der Bedingung (78) genügen (Abb. 4):  $\omega^*(x)$  nimmt mit der Tiefe bis in die Umgebung von  $\pi \delta/2$  zu, wo sich ein ausgeprägtes Maximum befindet. Das Produkt von  $\alpha$  und  $\omega^*$  ist positiv.

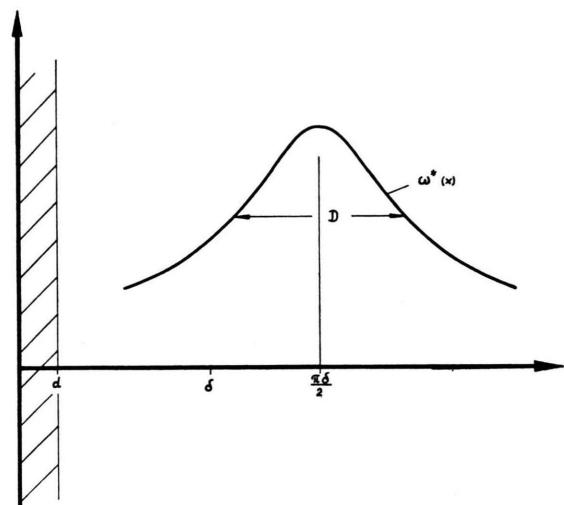


Abb. 4. Prinzipieller Verlauf einer Lösung der Anregungsbedingung (78).

Eine andere Lösung ist

$$\omega^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 3\pi\delta/8, \\ \frac{2\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{\mu^2 \sigma^2 d^2 \alpha_0 \delta} & \text{für } x > 3\pi\delta/8, \end{cases} \quad (80)$$

für die das Produkt von  $\alpha$  und  $\omega^*$  ebenfalls positiv ist. Als gemeinsames Merkmal zeigen die angegebenen Lösungen einen starken Anstieg vor dem Argu-

mentwert  $\pi\delta/2$ . Andererseits ist zu sehen, daß die Lösungen in größerer Tiefe auf kein typisches Verhalten festgelegt sind<sup>7</sup>. Das erklärt sich daraus, daß dort die elektromagnetischen Felder praktisch nicht mehr vorhanden sind.

Das Vorzeichen des Produktes  $\alpha\omega^*$  läßt eine einfache Interpretation zu. Nach (2) und (66) gilt, daß  $\varrho$  und  $v'^2$  nur von  $r$  abhängen,

$$\begin{aligned}\alpha\omega^* = & -\frac{4}{15}\gamma\mu\sigma v'^2 L^2 T \\ & \cdot \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{2v'^2} \frac{dv'^2}{dr} \right) \left( \frac{\partial\omega^2}{\partial\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_0} \sin 2\vartheta_0.\end{aligned}\quad (81)$$

Entsprechend den Darlegungen im vorigen Abschnitt sehen wir in dem Ausdruck in der Klammer die Dichte als die das Vorzeichen bestimmende Größe an; dieser Faktor hat also ein negatives Vorzeichen.

Das Produkt der letzten beiden Faktoren

$$\sin 2\vartheta_0 (\partial\omega^2/\partial\vartheta)$$

zeigt bei positivem Vorzeichen eine Zunahme des Betrages der Winkelgeschwindigkeit bei Annäherung an die Äquatorebene an, bei negativem Vorzeichen eine Abnahme.

An Hand dieser Betrachtungen ist aus (81) zu entnehmen, daß einem positiven Produkt von  $\alpha$  und  $\omega^*$  eine differentielle Rotation entspricht, bei der die Äquatorzonen schneller rotieren als die polaren Zonen.

## 8. Anwendungen auf das allgemeine Magnetfeld der Sonne

Qualitativ entsprechen der Ansatz und die Ergebnisse des vorangehenden Abschnittes den Verhältnissen auf der Sonne.

Die Sonne besitzt ein allgemeines Magnetfeld, das mit einer Periode von etwa 22 Jahren schwingt. Dieser Periode entspricht ein  $\Omega$  von

$$\Omega = 0,27 \text{ a}^{-1} = 8,7 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}. \quad (82)$$

Der poloidale Anteil des periodisch schwingenden allgemeinen Magnetfeldes der Sonne tritt nach außen als Dipolfeld in Erscheinung, das seinen Nulldurchgang während eines Aktivitätsmaximums hat. Zu

<sup>7</sup> So ist z. B. (78) auch mit einem zu  $x^3$  proportionalen  $\omega^*$  zu erfüllen.

<sup>8</sup> Die Angaben über den physikalischen Zustand der Konvektionszone der Sonne sind entnommen aus A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

diesem Zeitpunkt besteht der toroidale Anteil aus zwei in mittleren Breiten der beiden Hemisphären liegenden Gürteln mit zueinander entgegengesetzten Orientierungen. Diese Gürtel werden sichtbar in den Sonnenfleckenpaaren mit ihren charakteristischen Polaritätsverteilungen.

Auf der Sonne beobachten wir eine uneinheitliche Rotation in dem Sinne, daß die äquatornahen Zonen schneller umlaufen als die polnahen. Die Beobachtungen liefern als Winkelgeschwindigkeit<sup>8</sup>

$$\omega(R, \vartheta) = (0,265 - 0,026 \cdot \cos 2\vartheta) 10^{-5} \text{ s}^{-1}. \quad (83)$$

Daraus errechnet sich der maximale Wert von  $\omega^*$  an der Oberfläche nach (66) zu

$$\omega_{\max}^* = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \text{ für } \vartheta_0 \approx 55^\circ. \quad (84)$$

Die Induktionswirkung dieser differentiellen Rotation führt zum Aufbau zweier toroidaler Magnetfeldgürtel – auf deren Vorhandensein im Aktivitätsmaximum geschlossen werden muß –, falls im Minimum ein Dipolfeld vorhanden war. Das entspricht dem Aufbau des  $H_y$  aus dem  $H_z$  in Gl. (64). COWLING konnte bereits 1953 zeigen<sup>9</sup>, daß diese Vorstellung zu qualitativ und quantitativ befriedigenden Resultaten führt.

Der für den Aufbau des poloidalen Feldes aus dem toroidalen Felde verantwortliche Mechanismus, also die für eine Dynamowirkung notwendige Rückkopplung, konnte bisher noch nicht in zwingender Weise nachgewiesen werden. Nach den hier dargelegten Untersuchungen wird er durch den in der Konvektionszone der Sonne sicher vorhandenen  $\alpha$ -Effekt geliefert, wie aus Gl. (65) zu entnehmen ist.

Die Lösungen (79) und (80) der Bedingung (78) zeigen, daß für einen solchen Dynamomechanismus besondere Anforderungen zu erfüllen sind: Die Wirkung der differentiellen Rotation – repräsentiert durch die Größe  $\omega^*$  – und die Wirkung des  $\alpha$ -Effektes müssen überwiegend an örtlich getrennten Stellen in Erscheinung treten. Dadurch wird die Schwächung eines vorhandenen Feldanteiles durch den mit entgegengesetztem Vorzeichen sich aufbauenden neuen Feldanteil erst mit einer laufzeitbedingten Phasenverschiebung wirksam, und damit ist dann die Generatorwirkung möglich.

<sup>9</sup> T. G. COWLING, The Sun, ed. G. P. KUIPER, University of Chicago Press, Chicago 1953, S. 575; siehe weiterhin M. STEENBECK, Beiträge aus der Plasmaphysik I, 153 [1960/61], B. W. BABCOCK, Astrophys. J. 133, 572 [1960].

Als Ursache für die differentielle Rotation sind meridionale Strömungen in der Sonne anzusehen<sup>10</sup>. Danach muß eine Zunahme von  $\omega^*$  mit der Tiefe vorhanden sein. Jedoch ist ein so starkes Anwachsen, wie es die Bedingung (78) erfordert, nur dann zu erwarten, wenn die Viskosität dabei sehr stark abnimmt. In der Konvektionszone der Sonne und besonders in den oberen Schichten ist die turbulente Viskosität maßgebend, während nach unten zu mit abnehmender Turbulenz in immer stärkerem Maße die wesentlich kleinere molekulare Viskosität zuständig ist. Aus diesem Grunde ist es nicht unplausibel, in den unteren Schichten der Konvektionszone mit beträchtlich erhöhtem  $\omega^*$  zu rechnen.

Diese Ausführungen sollen jedoch nicht über den vorläufigen Charakter des hier behandelten Modells hinwegtäuschen. Der Wert ist darin zu sehen, daß unter plausiblen Voraussetzungen ein Dynamomechanismus für ein alternierendes Feld nachgewiesen ist. Es ist unschwer nachzuprüfen, daß ein solcher Dynamo für von  $x$  unabhängige Funktionen  $\alpha$  und  $\omega^*$  nicht existiert. Eine numerische Behandlung von Modellen, in denen erstens die sphärische Geometrie und zweitens unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten für die Funktionen  $\alpha(x)$ ,  $\omega^*(x)$  und  $\sigma(x)$  berücksichtigt werden, wird Auskunft darüber geben können, in welchen Grenzen eine Selbsterhaltung alternierender Felder möglich ist und welche weiteren Einzelheiten der Beobachtungen sich dann noch deuten lassen.

Abschließend wollen wir die für eine Aufrechterhaltung des Feldes notwendige mittlere Turbulenzgeschwindigkeit abschätzen.

Das in (78) auftretende Produkt  $\mu\sigma$  röhrt von den für die mittleren Feldgrößen geltenden Gleichungen her, ist somit als verschieden von dem Produkt  $\mu\sigma$  für die lokalen Feldgrößen anzusehen (I, S. 369). Die Beobachtungen der magnetischen Erscheinungen auf der Sonne lassen Schlüsse auf die Größe des magnetischen Diffusionskoeffizienten  $(1/\mu\sigma)_g$  für die mittleren Felder, also für die globalen Verhältnisse zu. Wir können auf diesen Wert aus der Skintiefe des allgemeinen Magnetfeldes und aus der Lebensdauer der Sonnenflecken schließen.

Aus der Größe von Sonnenflecken — es werden Durchmesser von einigen  $10^4$  km bis zu solchen von  $10^5$  km beobachtet — müssen wir auf eine Eindring-

tiefe von ungefähr  $5 \cdot 10^4$  km schließen. Aus (63) und (82) folgt dann

$$(1/\mu\sigma)_g = \Omega \delta^2 / 2 \approx 10^7 \text{ m}^2/\text{s}. \quad (85)$$

Die Lebensdauer  $T_f$  eines Sonnenfleckes von etwa einem Durchmesser  $D_f = 10^4$  km wird zu einigen Monaten beobachtet. Gemäß des Zusammenhangs  $T_f = (\mu\sigma)_g D_f^2$  ergibt sich wieder ungefähr der Wert  $10^7 \text{ m}^2/\text{s}$ .

Dagegen erhalten wir mit einer Leitfähigkeit<sup>8</sup> von  $10^3 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  für das Plasma der Wasserstoffkonvektionspone für den Diffusionskoeffizienten der lokalen Feldgrößen

$$(1/\mu\sigma)_1 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} 10^3} \text{ m}^2/\text{s} \approx 10^3 \text{ m}^2/\text{s}. \quad (86)$$

Diese Überlegungen zeigen, daß der Diffusionskoeffizient für die globalen Felder durch die Turbulenz um etwa den Faktor  $10^4$  gegenüber dem Diffusionskoeffizienten für die lokalen Felder erhöht ist.

Zur Abschätzung der für die Felderhaltung notwendigen mittleren Turbulenzgeschwindigkeiten setzen wir den Wert für  $\omega^*$  gemäß (84) gleich dem konstanten Wert in (80). Das dort auftretende Produkt  $\mu\sigma$  entnehmen wir aus (85).  $\alpha_0$  berechnen wir aus (2). Die logarithmische Ableitung der Dichte nach dem Ort ist gleich der reziproken Äquivalenthöhe, für die  $100 \text{ km}$  einzusetzen ist. Auf Korrelationslänge und Korrelationszeit können wir aus den Beobachtungen der Granulen schließen, danach ist  $L \approx 100 \text{ km}$  und  $T \approx 100 \text{ s}$ . Für das Produkt  $\mu\sigma$  in dem Ausdruck für  $\alpha_0$  ist der lokale Wert, also (86) einzusetzen. Schließlich ist für  $d$  ein mehrfaches der Äquivalenthöhe anzunehmen, sagen wir  $1000 \text{ km}$ . Unter diesen Annahmen ergibt sich für die mittlere Turbulenzgeschwindigkeit ein Wert von ungefähr  $400 \text{ m/s}$ , der in der beobachteten Größenordnung liegt.

Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es fraglich ist, ob die in (I) gegebene Herleitung des Ausdrückes (2) auch für die starke Turbulenz der Wasserstoffkonvektionszone gültig bleibt.

## 9. Schlußbemerkungen

In den vorliegenden Untersuchungen wird die Existenz von Geschwindigkeitsfeldern nachgewiesen, die als magnetohydrodynamische Dynamos wirken.

<sup>10</sup> R. KIPPEHHAHN, Astrophys. J. 137, 664 [1963]. — M. STEENBECK u. F. KRAUSE, Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin 7, 335 [1965].

Ein verhältnismäßig geringer mathematischer Aufwand wurde durch eine mit den Mitteln der Theorie der Zufallsfunktionen bewerkstelligten Abstraktion von den individuellen Zügen spezieller Geschwindigkeitsfelder erreicht.

Gerade die Abstraktion von den individuellen Eigenschaften läßt eine gemeinsame Eigenschaft dieser Felder deutlich hervortreten, die anscheinend für die Wirksamkeit als Dynamo notwendig ist: Die Auszeichnung eines Schraubensinnes.

Das innere Produkt  $\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$  ist auf Grund der Definition von  $\nabla \times \mathbf{v}$  offensichtlich ein Maß dafür, ob ein Schraubensinn und welcher Schraubensinn durch das Feld  $\mathbf{v}$  ausgezeichnet wird.

Es wird also der Schluß nahegelegt, daß ein definites Vorzeichen des inneren Produktes  $\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$  in räumlich ausgedehnten Gebieten eine notwendige Bedingung dafür ist, daß das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  Dynamowirkung zeigt.

Die Bedingung  $\mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0$  ist charakteristisch für flächennormale Felder. Die Aussage, daß von flächennormalen Geschwindigkeitsfeldern keine Dynamowirkung ausgeht, könnte eine Präzisierung des Theorems von COWLING<sup>11</sup> sein; ein Beweis dieser Aussage liegt allerdings bisher nicht vor.

<sup>11</sup> T. G. COWLING, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **94**, 39 [1934].

## Angular Dependence of Channelling in Gold Single Crystals

R. D. SCHUCKERT,

Physik-Department der Technischen Hochschule München

H. LUTZ,

Oak Ridge National Laboratory, Tennessee, USA

and R. SIZMANN

III. Physikalisches Institut der Universität München

(Z. Naturforsch. **21 a**, 1296—1299 [1966]; received 2 April 1966)

The penetration profiles of 70 keV krypton-85 ions in gold single crystals were determined for different incident angles between the ion beam and the  $\langle 110 \rangle$  or  $\langle 111 \rangle$  crystal axis. Channelling is most pronounced in the  $110$  direction but it falls off at first steeply, then at angular deviations larger than  $10^\circ$  rather slowly by tilting to  $\langle 111 \rangle$  or  $\langle 100 \rangle$ . A sharp aperture cannot be defined for the  $110$  channel; its half width is of the order of  $2 \dots 3^\circ$ . In  $\langle 111 \rangle$  no directional channel seems to be operative, although the long tail range distribution indicates a steering of the penetrating ions.

The strong influence of crystallographic orientation on the penetration depth of fast ions in solids has been shown theoretically and experimentally<sup>1</sup>. A particle, penetrating along certain low index directions (e. g.  $\langle 100 \rangle$  and  $\langle 110 \rangle$  in fcc metals) is subject to reflective forces from the neighbouring atomic rows which tend to keep it moving straight ahead. The steering leads to ranges much farther than the usual mean range. This channelling, as it

was called, occurs readily when bombarding a perfect single crystal with an ion beam parallel to an open lattice direction. However, the yield of far penetrating ions depends critically on the angle of the impinging particles with respect to the favourable crystallographic axis. Hitherto, this angular dependence of channelling has been investigated for light projectiles (protons,  $\alpha$ -particles) in the energy range between 27 keV and 7.7 MeV<sup>2</sup> and for rather

<sup>1</sup> M. T. ROBINSON and O. S. OEN, Bull. Am. Phys. Soc. **7**, 171 [1962]; Appl. Phys. Letters **2**, 30 [1963]; Phys. Rev. **132**, 2385 [1963]. — G. R. PIEREY, F. BROWN, J. A. DAVIES, and M. McCARGO, Phys. Rev. Letters **10**, 399 [1963]. — H. LUTZ and R. SIZMANN, Phys. Letters **5**, 113 [1963]. — R. S. NELSON and M. W. THOMPSON, Phil. Mag. **8**, 1677 [1963]. — C. LEHMANN and G. LEIBFRIED, J. Appl. Phys. **34**, 2821 [1963]. — J. LINDHARD, Phys. Letters **12**, 126 [1964]; Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Medd. **34**, No. 14 [1965].

<sup>2</sup> W. BRANDT, J. M. KHAN, D. L. POTTER, R. D. WORLEY, and H. P. SMITH, Phys. Rev. Letters **14**, 42 [1965]. — M. W. THOMPSON, Phys. Rev. Letters **13**, 756 [1965]. — E. BØGH, J. A. DAVIES, and K. O. NIELSEN, Phys. Letters **12**, 129 [1964]. — D. S. GEMMEL and R. E. HOLLAND, Phys. Rev. Letters **14**, 945 [1965]. — R. S. NELSON and M. W. THOMPSON, Phil. Mag. **8**, 1677 [1963]. — B. DOMEIJ and K. BJÖRKQUIST, Phys. Letters **14**, 127 [1965].